Tečná rovina a Taylorův polynom

Pokud někde nejsou uvedeny výsledky, tak můžete využít konzultací u přednášejícího nebo u vedoucího cvičení. Totéž v případě že výsledky uvedeny jsou, ale vy neumíte příklad vyřešit.

Příklad 1. Tečná rovina
(a) Určete rovnici tečné roviny k funkcím:
$z = 2x^2 + y^2$, v bodě $A = [1, 1, ?]$. *Výsledek:* $4x + 2y - z - 3 = 0$.
$z = x^4 + 2x^2y - xy + x$, v bodě $A = [1, ?, 2]$. *Výsledek:* $5x + y - z + 3 = 0$.
$z = xy$, v bodě $A = [?, 2, 2]$. *Výsledek:* $2x + y - z - 2 = 0$.
(b) K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ určete tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 1$
Výsledek: Rovnice tečné roviny je $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$.
(c) Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce
$z = \frac{x^2}{2} - y^2$ v bodě $A = [2, -1, 1]$: *Výsledek:* $[2x + 2y - z - 1 = 0, \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}]$.
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ v bodě $A = [3, 4, -7]$: *Výsledek:* $17x + 11y + 5z - 60 = 0$, $x = 3 + 17t, y = 4 + 11t, z = -7 + 5t]$
(d) Určete délku úseku přímky $x + 1 = 0$, $y - 4 = 0$ mezi grafem funkce $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a tečnou rovinou ke grafu této funkce v bodě $A = [0, 2, 2]$.
Výsledek: 5

Příklad 2. Taylorův polynom
(a) Vyjádřete funkci $f(x, y) = \cos x \cos y$ v bodě $[0, 0]$ Taylorovým polynomem druhého stupně.
Výsledek: $T_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + R_2$.
(b) Nalezněte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ v bodě $[0, 0]$.
Výsledek: $T_2 f = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + R_2$.
(c) Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $u = x^3 - 3yz^2 + 2xy - z^2 + x - 3y + 2$ v bodě $[1, 2, 1]$.
Výsledek: $f = -5 + 8(x-1) - 4(y-2) - 14(z-1) + \frac{1}{2!}[6(x-1)^2 - 14(z-1)^2 + 4(x-1)(y-2) - 12(y-2)(z-1)] + \frac{1}{3!}[6(x-1)^3 - 18(y-2)(z-1)^2]$.
(d) Napište Taylorův polynom funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$ pro $m = 3$.
Výsledek: $T_3 f = 1 + (x-1) - (y-1) + \frac{1}{2!}[-2(x-1) + 2(y-1)^2] +$
$+ \frac{1}{3!}[6(x-1)(y-1)^2 - 6(y-1)^3] + R_3$.
(e) Funkci $z = x^y$ rozložte v mocniny $(x-1)(y-1)$ do 3. řádu včetně.
Výsledek: $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[(x-1)^2(y-1)] + R_3$

Příklad 3. Nalezněte Taylorův polynom T stupně m funkce f v bodě X_0:
(a)$f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 2$: VB: $T = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
(b)$f = \cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$, $X_0 = [0, 0, 0]$, $m = 2$: VB: $T = -xy - xz - yz$.
(c)$f = e^x \sin y$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 3$: VB:$T = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$.
(d)$f = \cos x \cos y$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 4$: VB:$T = 1 - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$.
(e)$f = e^{x+y}$, $X_0 = [1, -1]$, $m = 3$: VB:$T = 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$.
(f)$f = \mathrm{arctg}\frac{1+x+y}{1-x-y}$, $X_0 = [0, 0]$, $m = 1$: VB:$T = \frac{\pi}{4} + x - xy$.